中原工学院
Zhongyuan University of Technology

5 机械振动

任课教师 曾灏宪

中原工学院 理学院

- 任一物理量在某一定值附近随时间周期性变化均称为**振动**.
  - 力学量（如位移）、电磁量（如 I 、U、$\vec{E}$、$\vec{B}$）
- **机械振动**
  - 物体在一定位置附近作来回往复运动
  - 例如一切发声体、心脏、海浪起伏、地震以及晶体中原子的振动等.
- **简谐运动**
  - 最基本、 最简单、最重要的振动
  - 作简谐运动的物体，称为**谐振子**

简谐运动 $\xleftrightarrow[\text{分解}]{\text{合成}}$ 复杂振动

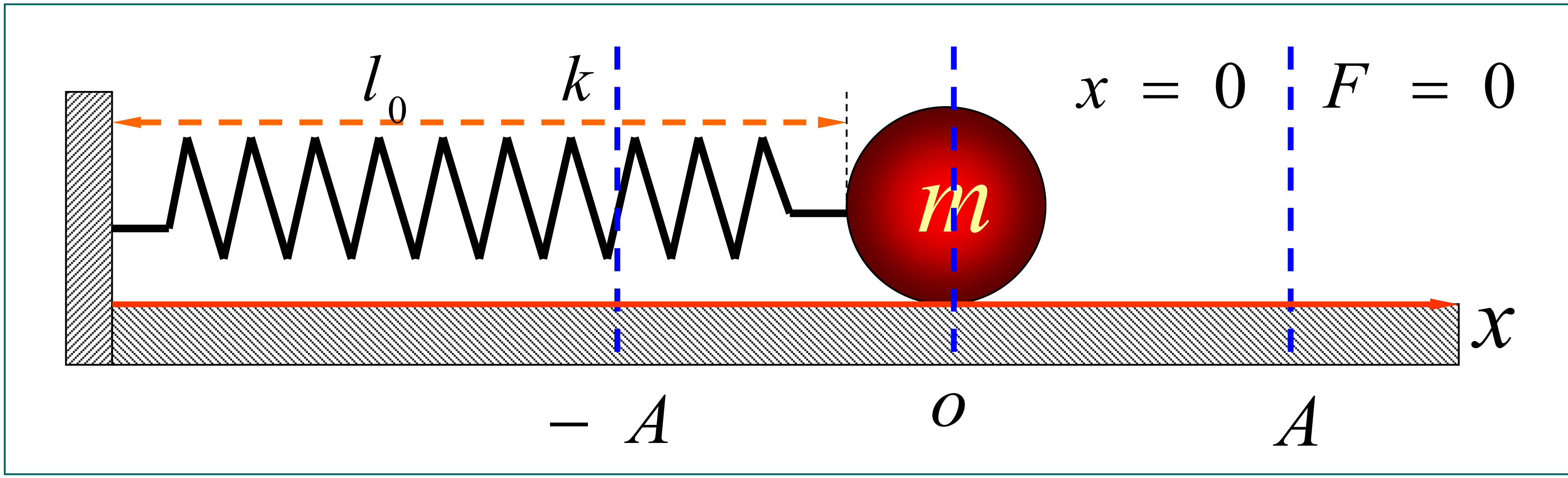
大学物理（上）

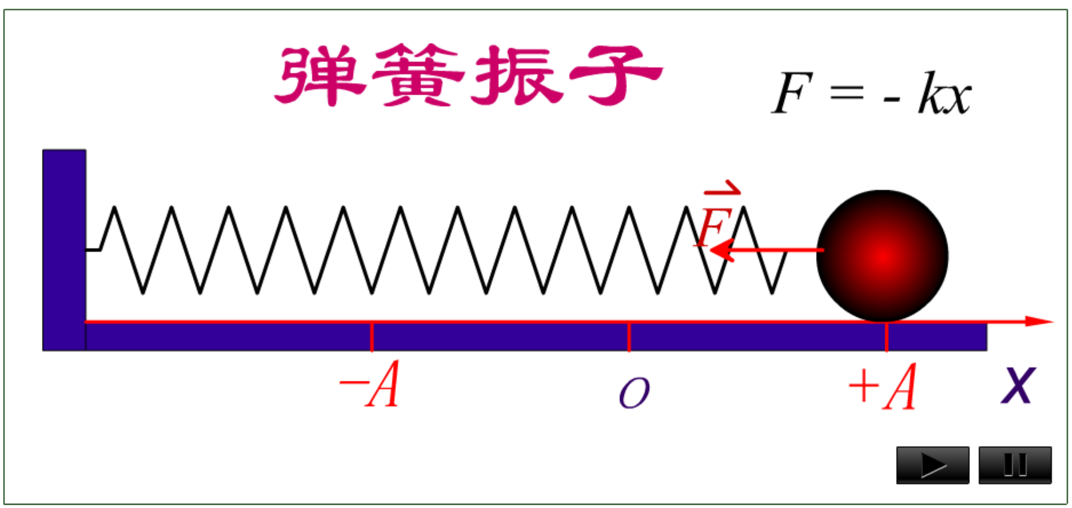
5　机械振动

5.1 简谐运动 简谐运动的振幅、周期、频率和相位

一 简谐运动

例：弹簧振子的振动



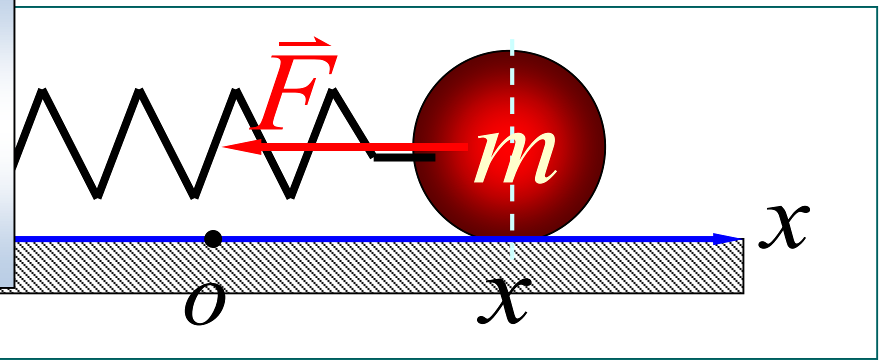


轻弹簧 k + 质点 m

集中弹性　　集中惯性

回复力和物体惯性交互作用形成简谐振动

可以运用质点运动学的方法来分析其运动特征



$$F = -kx = ma$$

令 $\omega^2 = k/m$

$$a = -\omega^2 x$$

a 与 x 方向相反

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

简谐振动的微分方程

求解得：积分常数，根据初始条件确定

$$x = \boxed{A}\cos(\omega t + \boxed{\varphi})$$

简谐振动的运动方程

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

二 简谐运动的判断（满足其中一条即可）

1）物体受线性回复力作用 $F=-kx$ 动力学特征

判据1：凡物体所受回复力与位移成正比且反向时，物体的运动是简谐振动。

2）简谐运动的动力学描述 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$ 运动学特征

判据2：若某物理量满足*方程，即该物理量对时间的二阶导数与其自身成正比且反号时，该物理量的变化称为简谐振动。

3）简谐运动的运动学描述

（在无外驱动力的情况下）

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\boxed{v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)}$$

判据3：任何一个物理量如果是时间的余弦（或正弦）函数，该物理量的变化称为简谐振动。

- 简谐运动的特征 $a = -\omega^2 x$

弹簧振子 $\omega = \sqrt{k/m}$　　单摆 $\omega = \sqrt{g/l}$

（由振动系统本身性质决定）

三 简谐振动的特征量

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

1. 振幅 A　$A = |x_{\max}|$

表示振动的范围（强弱），由初始条件决定。

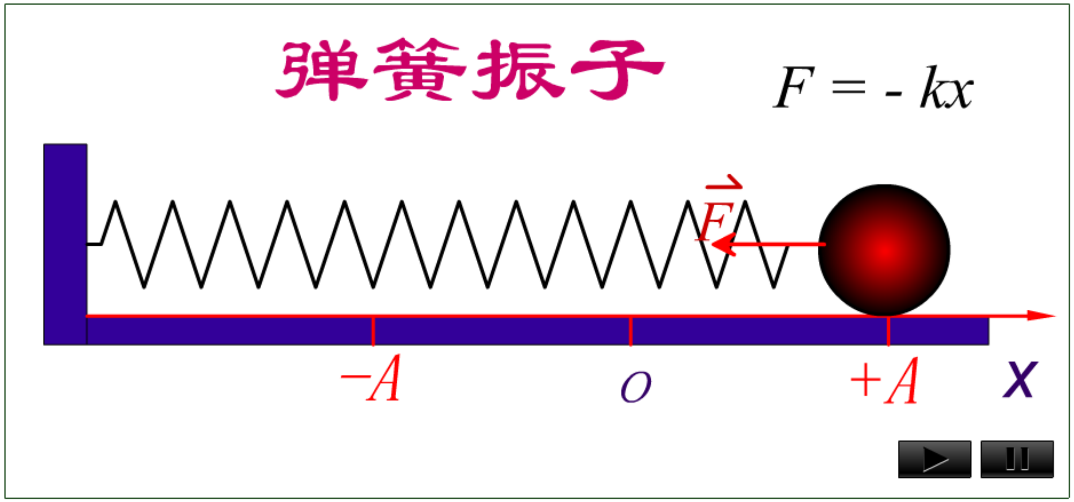
由
$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

在 $t = 0$ 时刻
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases}$$

解得

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}$$

2. 周期T 、频率 ν 和角频率 ω



周期 T 完成一次全振动所经历的时间

频率 ν 单位时间内完成全振动的次数。单位: Hz

角频率 ω （或称圆频率）

在 2π 秒时间内完成全振动的次数　　单位：rad /s

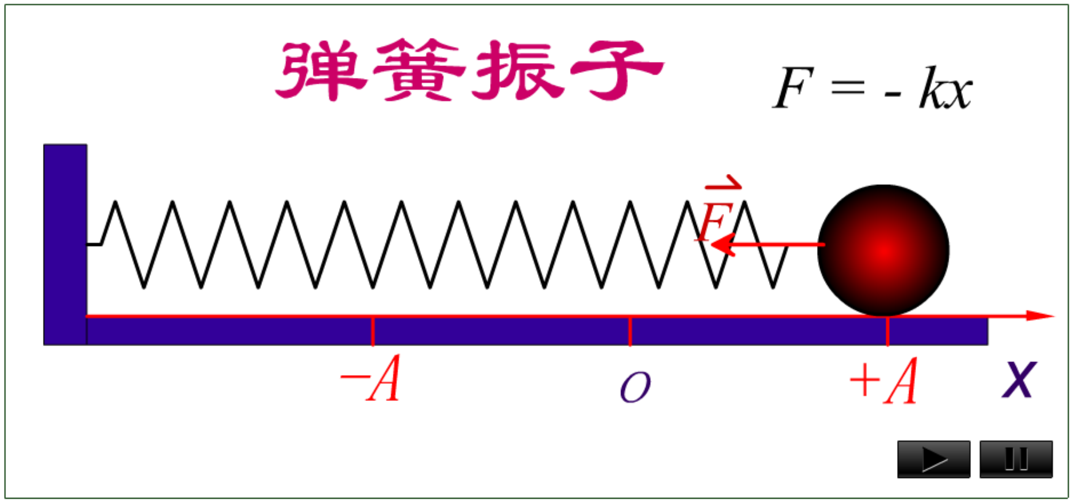
$\omega = 2\pi\nu$　　$\nu = 1/T$　　$T = 2\pi/\omega$

$\omega = \sqrt{k/m}$ ⟶ 固有角频率

是由系统本身决定的常数，与初始条件无关

3. 相位 $\omega t + \varphi$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$



讨论

1） $\omega t + \varphi \rightarrow (x, v)$ 存在一一对应的关系；

$(\omega t + \varphi)$是 t时刻的相位

相位是描述振动状态的物理量

2）初相位 $\varphi\ (t=0)$ 描述质点初始时刻的运动状态.

描述$t=0$时刻运动状态，在振动过程中保持不变，由初始条件确定。φ取值范围 $0 \sim 2\pi$ 或 $-\pi \sim \pi$

由 $t=0$时

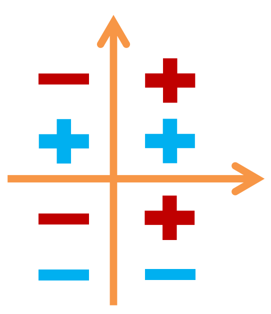
$$x_0 = A\cos\varphi$$

$$v_0 = -A\omega\sin\varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

或

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x_0}{A} \\ \sin\varphi &= \frac{-v_0}{A\omega} \end{aligned}\right\}$$



3）相位在 $0\sim 2\pi$ 内变化，质点无相同的运动状态；

$(\omega t+\varphi)$ 每变化 2π 整数倍，x、v 重复原来的值（回到原状态），最能直观、方便地反映出谐振动的周期性。

相差 $2n\pi$（n为整数）的质点运动状态全同.（周期性）

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

例：当 $\omega t+\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ 时：$x=\dfrac{A}{2}$，$v=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}A\omega$

质点在 $x=A/2$ 处以速率 v 向 $-x$ 方向运动

当 $\omega t+\varphi=\dfrac{5}{3}\pi$ 时：$x=\dfrac{A}{2}$，$v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}A\omega$

质点在 $x=A/2$ 处以速率 v 向 $+x$ 方向运动

当 $\omega t+\varphi=\dfrac{7}{3}\pi$ 时：$x=\dfrac{A}{2}$，$v=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}A\omega$

质点在x $=$ A $/2$ 处以速率v向 $-$ x方向运动

4）**相位差**　利用**初相**可以方便地比较**同频率**简谐振动的**步调**

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

相位差　$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \pm 2k\pi & \text{同相} \\ \Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi & \text{反相} \end{cases}$$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$

$\Delta\varphi > 0$, x_2振动超前 x_1 $|\Delta\varphi|$；

$\Delta\varphi < 0$, x_1振动超前 x_2 $|\Delta\varphi|$

超前

落后

四 简谐振动的图像

$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 取 $\varphi=0$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

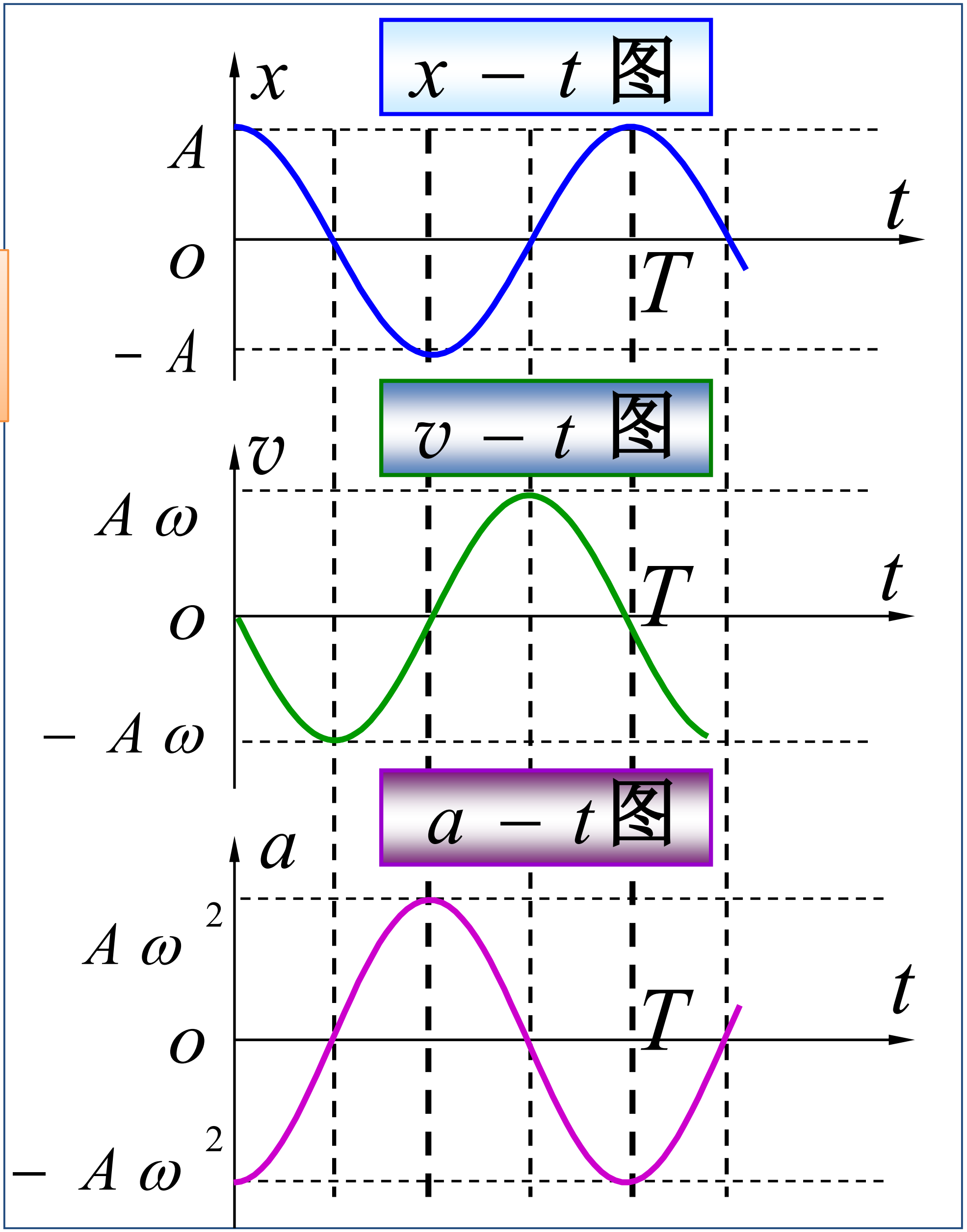
简谐运动中，x 和 v 间不存在一一对应的关系.

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

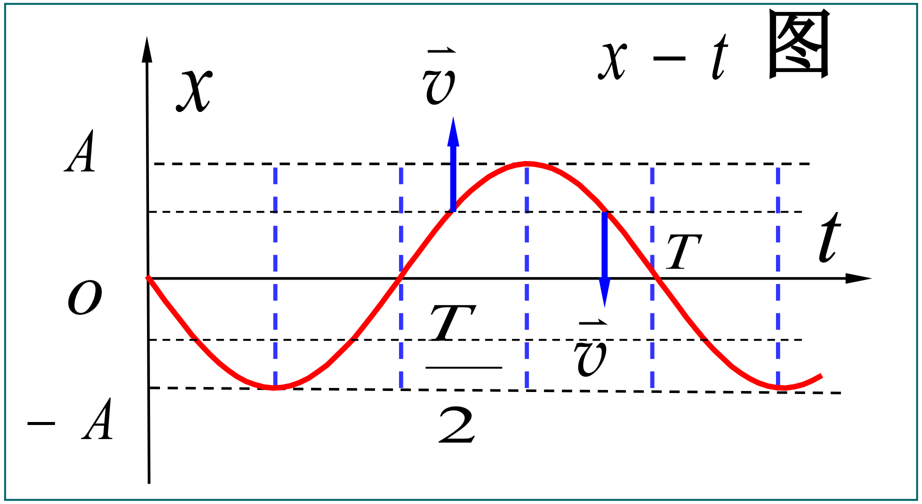
$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$



根据 $x-t$ 图判断振子运动的方向

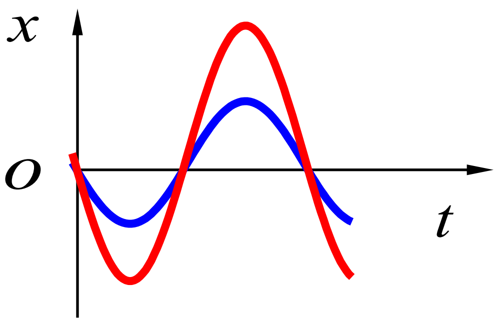
如下图，当 $x=\frac{A}{2}$ 时，振子运动方向？



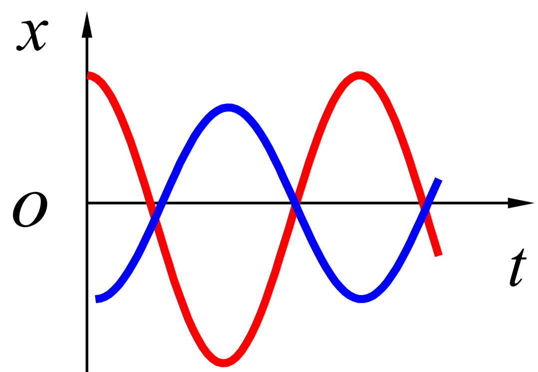
$$\begin{cases} x = A\cos(\boxed{\omega t + \varphi}) \\ v = -A\omega\sin(\boxed{\omega t + \varphi}) \end{cases}$$

用振动的图像可以方便地比较同频率谐振动的步调

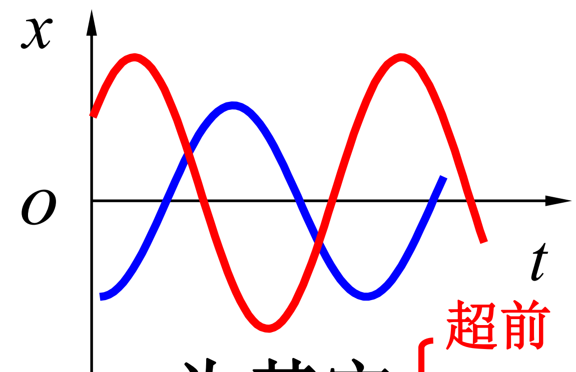
$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$



$\Delta\varphi = 0$ 同步



$\Delta\varphi = \pm\pi$ 反相



$\Delta\varphi$ 为其它 $\begin{cases} \text{超前} \\ \text{落后} \end{cases}$

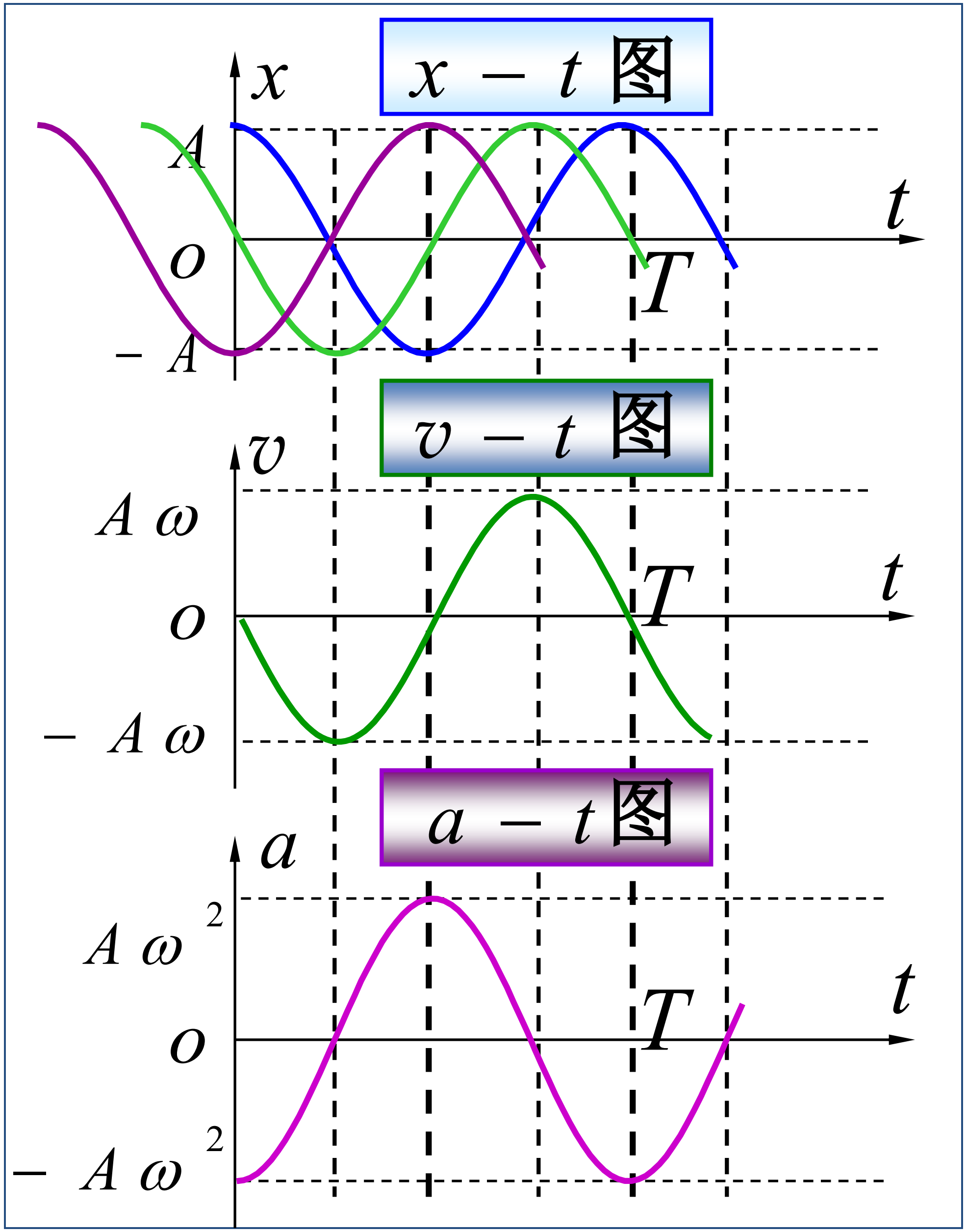
也可以比较**不同物理量**作同频率谐振动的**步调**

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

速度 v 超前位移 $\pi/2$
而落后于加速度 $\pi/2$



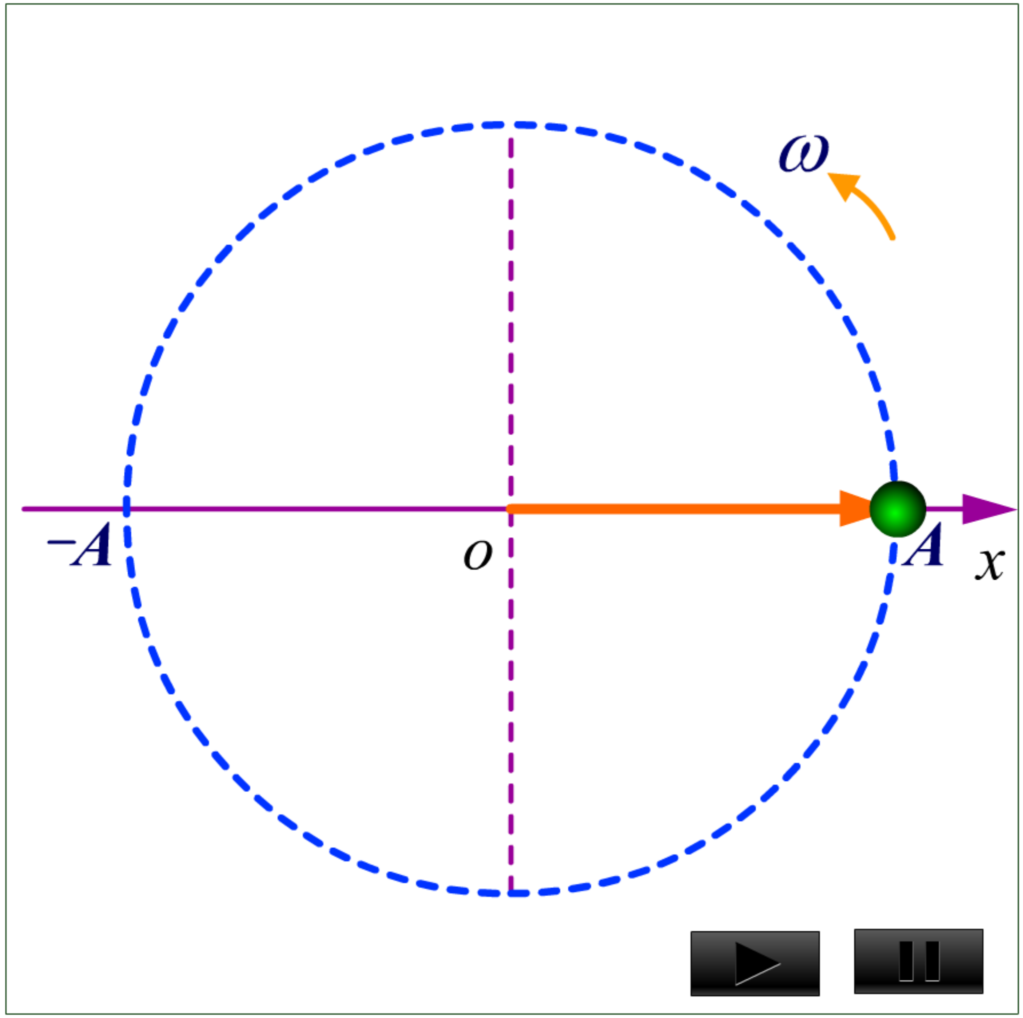
大学物理（上）

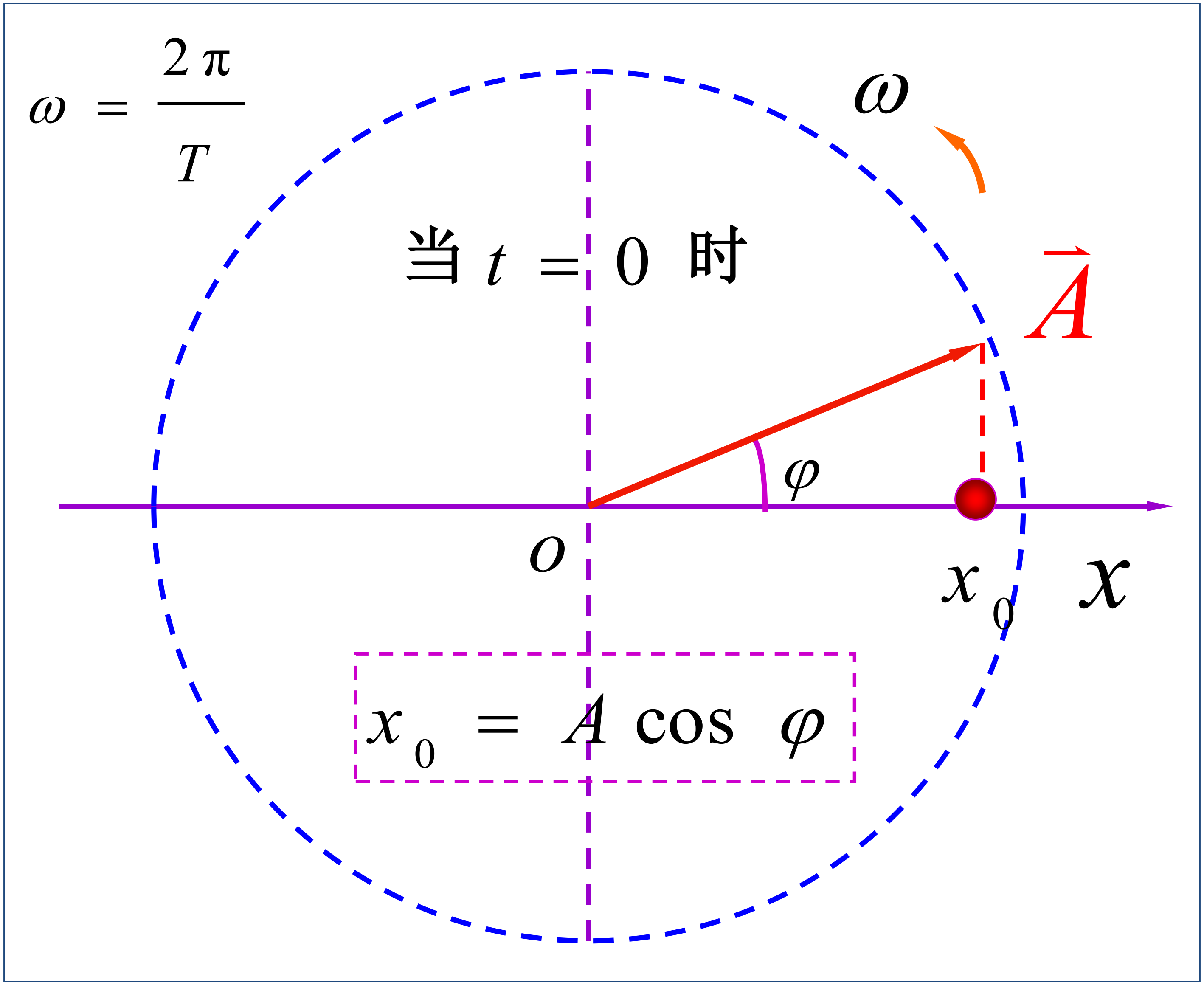
5 机械振动

5.2 旋转矢量

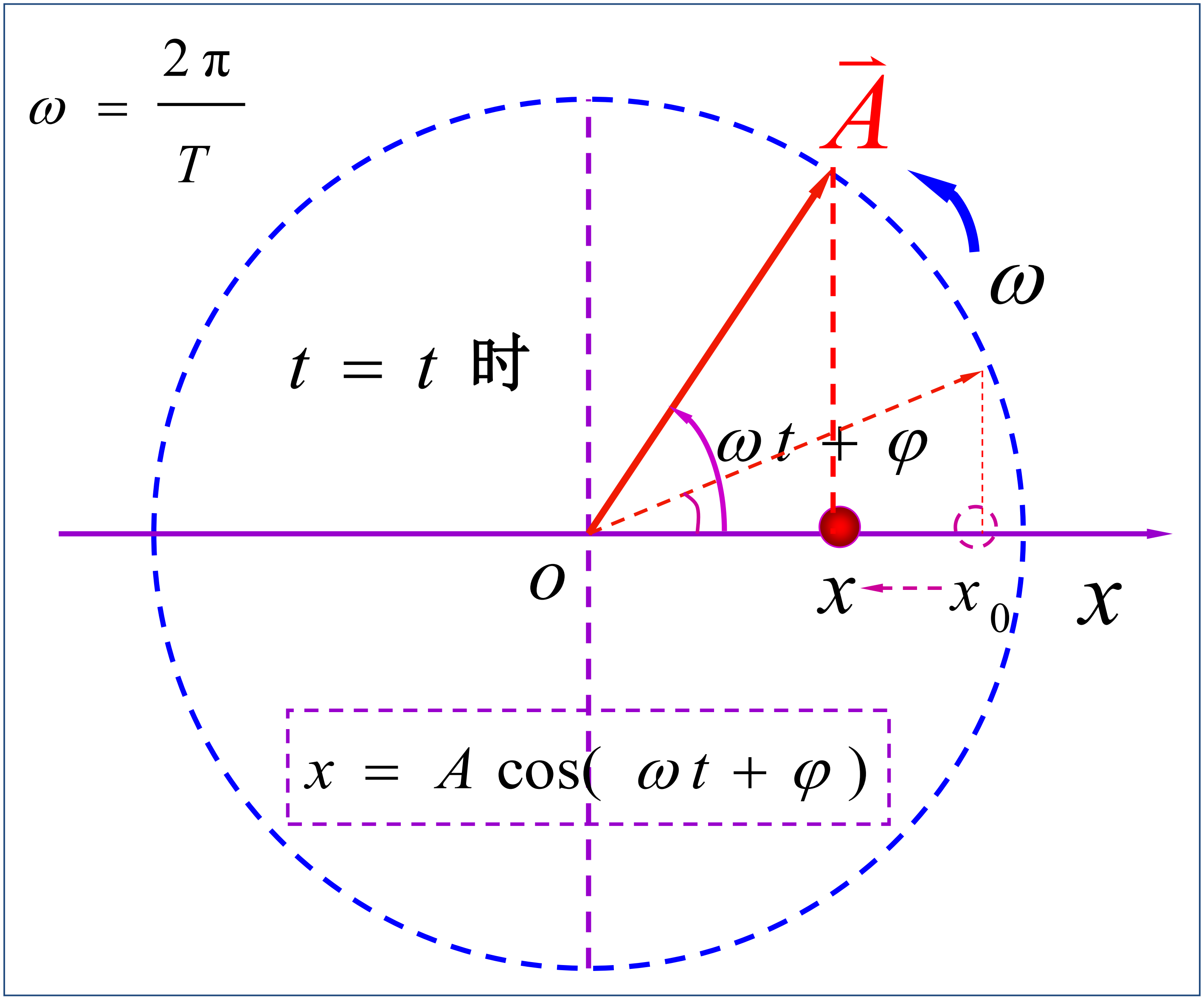
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

旋转矢量$\vec{A}$的端点在x轴上的投影点的运动为简谐运动.



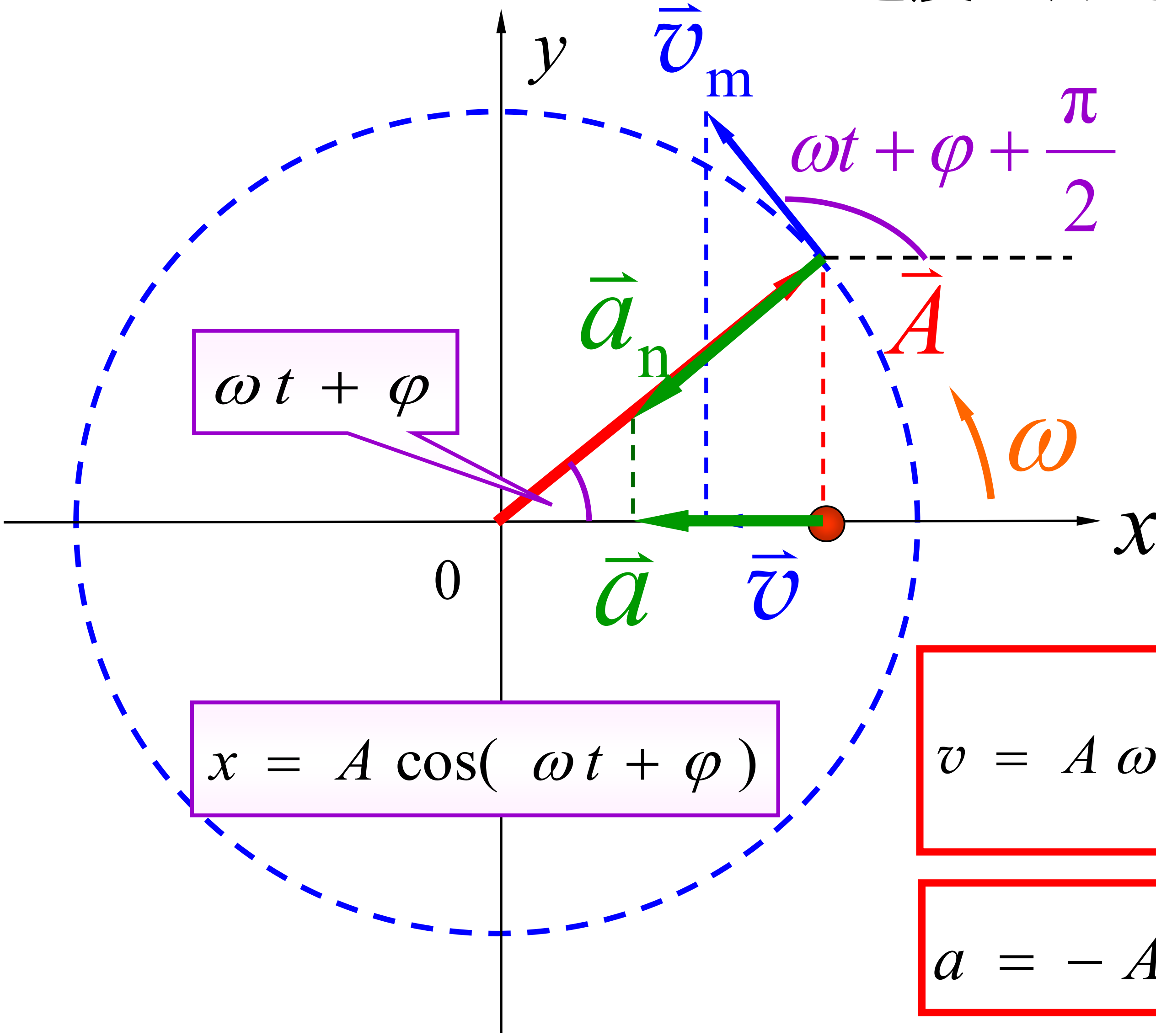


以 o 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动.



以 o 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动.

速度、加速度的旋转矢量



$$v_{\mathrm{m}}=A\omega$$

$$a_{\mathrm{n}}=A\omega^{2}$$

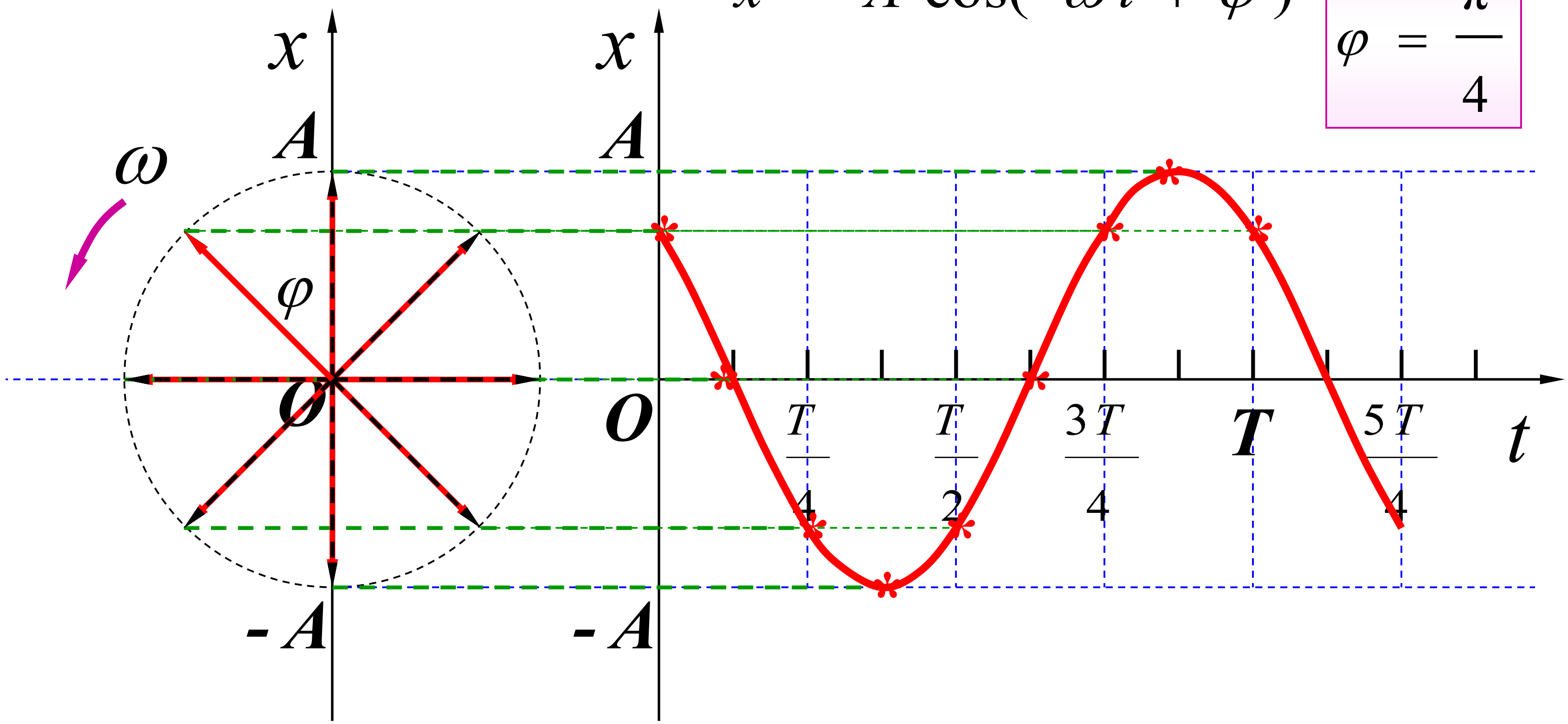
$$\boxed{v=A\omega\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})}$$

$$\boxed{a=-A\omega^{2}\cos(\omega t+\varphi)}$$

用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

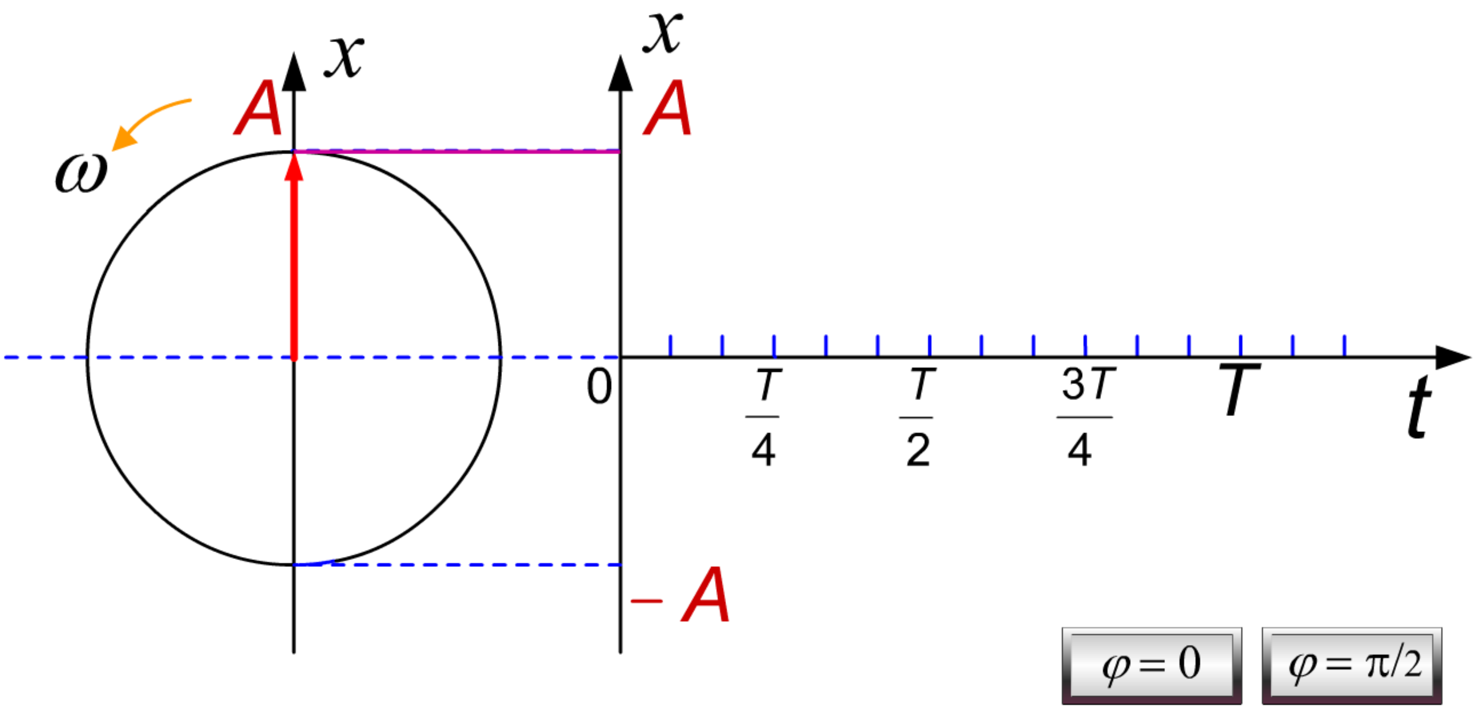
$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$



$T = 2\pi/\omega$（旋转矢量旋转一周所需的时间）

用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



$T = 2\pi / \omega$ （旋转矢量旋转一周所需的时间）

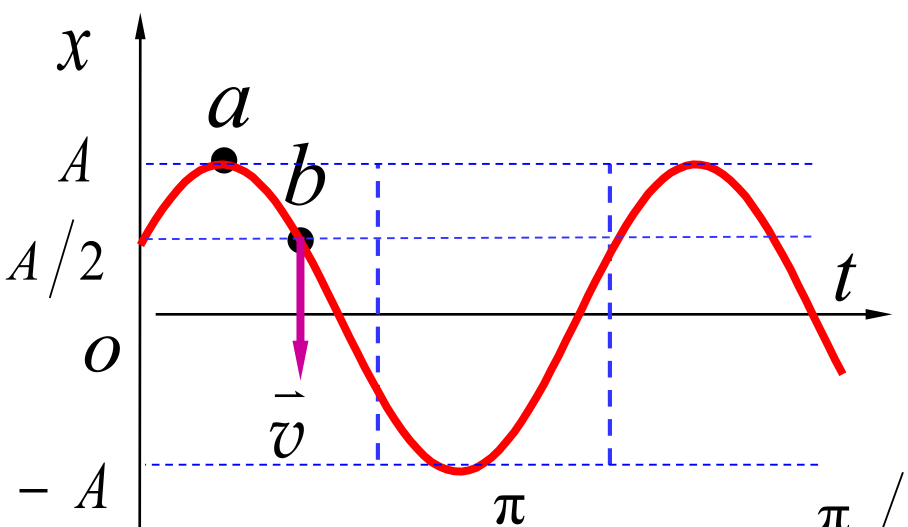
对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间.

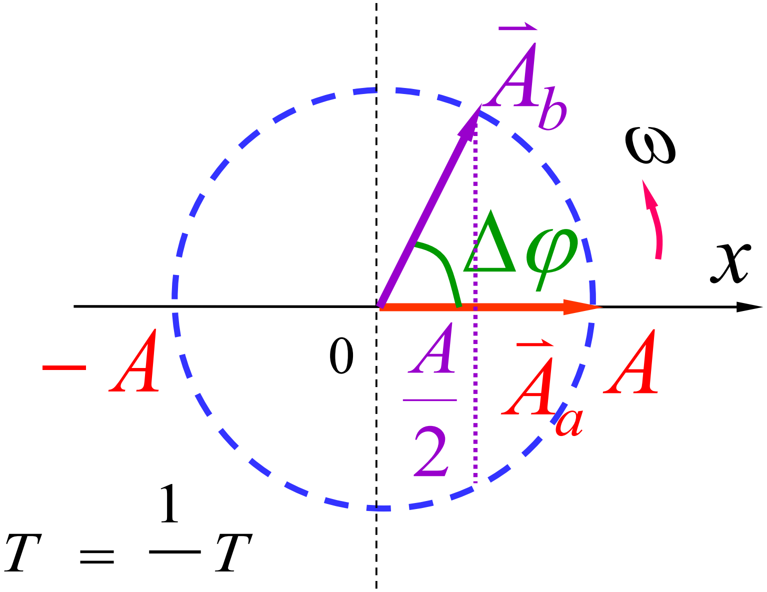
$$x = A\cos(\omega t_1 + \varphi)$$

$$x = A\cos(\omega t_2 + \varphi)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$

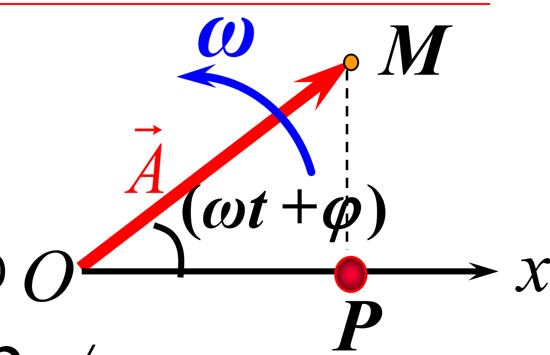




$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \qquad \Delta t = \frac{\pi/3}{2\pi}T = \frac{1}{6}T$$

旋转矢量 $\vec{A}$ 与谐振动的对应关系

旋转矢量 $\vec{A}$	简谐振动	符号或表达式
模	振幅	A
角速度	角频率	ω
t=0时，$\vec{A}$ 与Ox夹角	初相	φ_0
旋转周期	振动周期	$T=2\pi/\omega$
t时刻，$\vec{A}$ 与Ox夹角	相位	$\omega t+\varphi$
$\vec{A}$ 在Ox 上的投影	位移	$x=A\cos(\omega t+\varphi)$
$\vec{A}$ 端点速度在Ox上的投影	速度	$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$
$\vec{A}$ 端点加速度在Ox上的投影	加速度	$a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$



例 已知 $t=0, x=0, v<0$ 求 φ

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

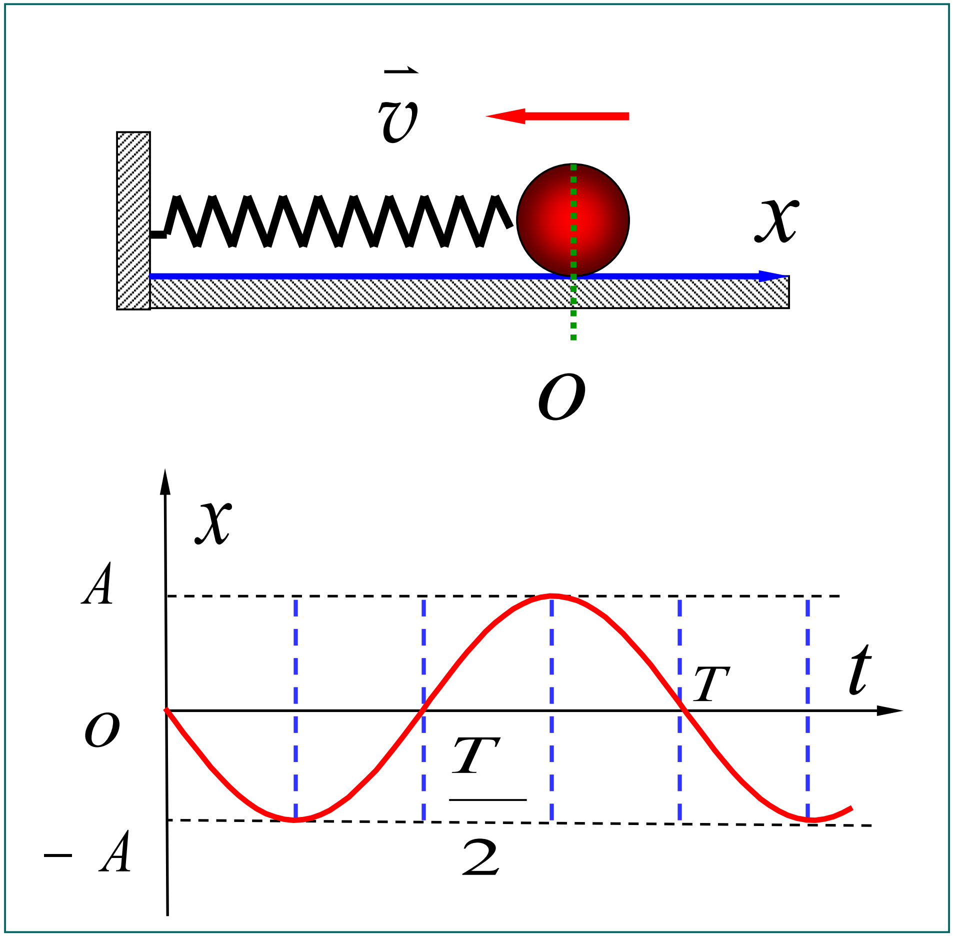
$$0 = A\cos\varphi$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

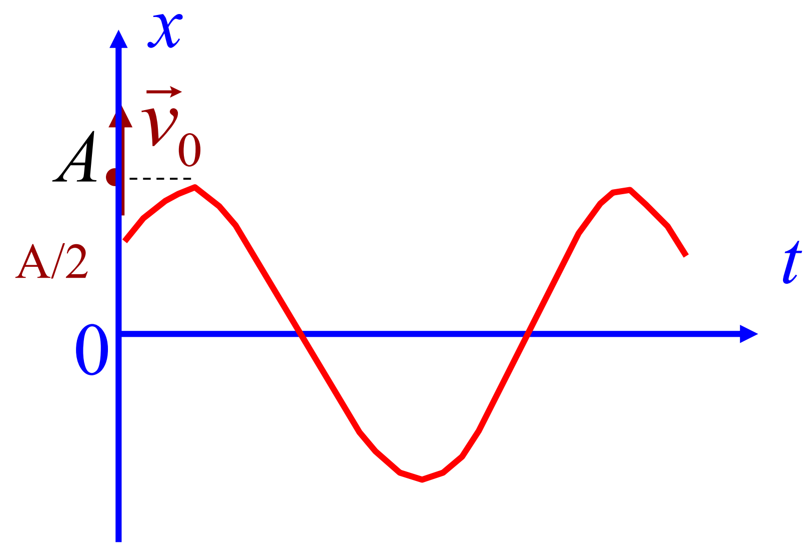
$$\because\ v_0 = -A\omega\sin\varphi < 0$$

$\therefore \sin\varphi > 0$ 取 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



例 由振动曲线确定初相



解 由振动曲线知 $t = 0$ 时刻

$$v_0 > 0 \qquad x_0 = \frac{A}{2}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x_0}{A} = \dfrac{1}{2} > 0 \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi > 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\sin\varphi < 0$$

$\therefore \quad \varphi = \dfrac{5\pi}{3}$ 或 $-\dfrac{\pi}{3}$ 为第四象限角

例　一质点作谐振动，周期为T，当它由平衡位置向 x 轴正方向运动时，从二分之一最大位移处到最大位移处这段路程所需要的时间为

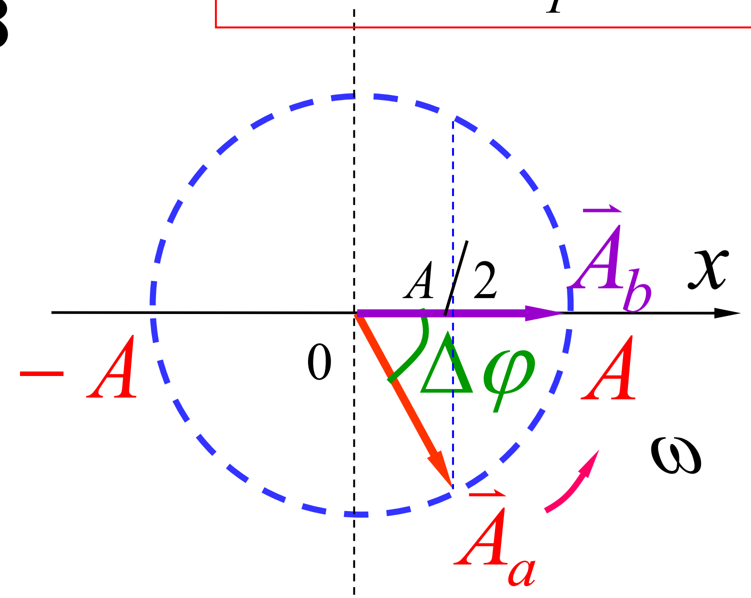
（1）$T/4$　　（2）$T/12$

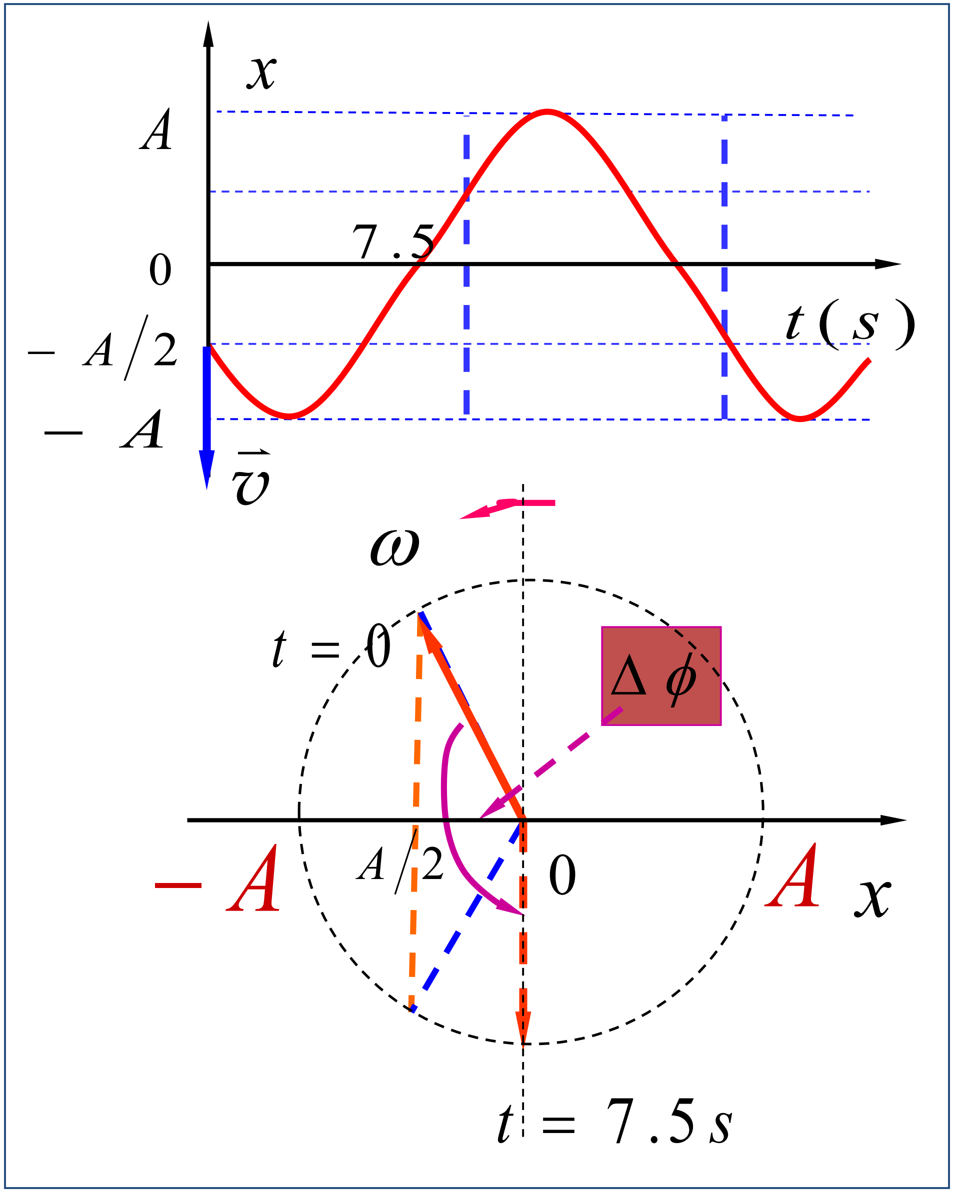
★（3）$T/6$　　（4）$T/8$

$$\Delta t=\frac{\Delta\varphi}{\omega}=\frac{\Delta\varphi}{\frac{2\pi}{T}}=\frac{T\Delta\varphi}{2\pi}$$

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi}=\frac{\pi/3}{2\pi}=\frac{\Delta t}{T}$$

$$\Delta t=T/6$$





例 一简谐运动的运动曲线如图所示，**求**振动周期．

$$t = 0 \quad x = -\frac{A}{2} \quad v < 0$$

$$t = 7.5\,\mathrm{s} \quad x = 0 \quad v > 0$$

$$\Delta\phi = 5\pi/6$$

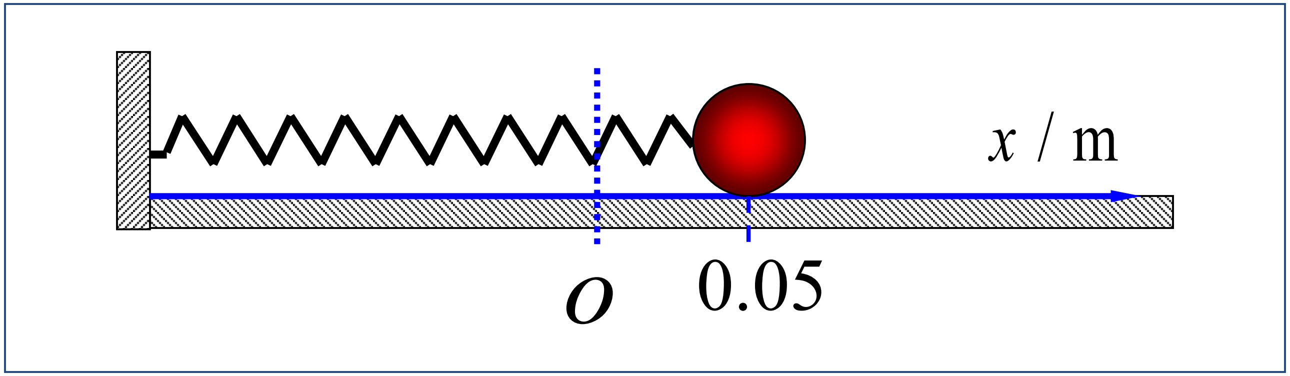
$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{7.5}{T}$$

$$T = 18\ \mathrm{s}$$

例　如图所示，一轻弹簧的右端连着一物体，弹簧的劲度系数 $k=0.72\mathrm{N\cdot m^{-1}}$，物体的质量 $m=0.02\mathrm{kg}$。（1）把物体从平衡位置向右拉到 $x=0.05\mathrm{m}$ 处停下后再释放，求简谐运动方程；

（2）求物体从初位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度；

（3）如果物体在 $x=0.05\ \mathrm{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0=0.30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求其运动方程.



解 （1） $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{0.72\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}}{0.02\ \mathrm{kg}}} = 6.0\ \mathrm{s^{-1}}$

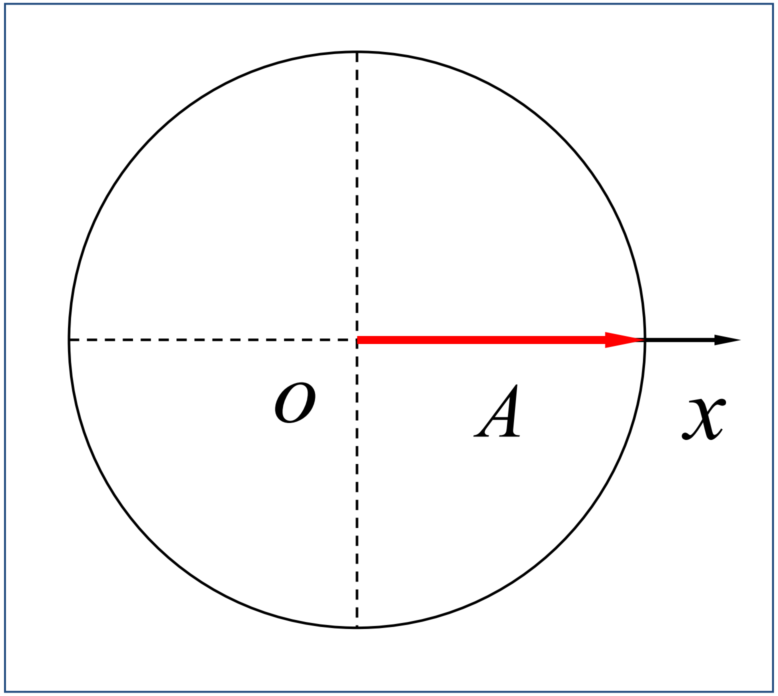
$$A = x_0 = 0.05\ \mathrm{m}$$

$$v_0 = -A\omega \sin\varphi = 0$$

$$\varphi = 0 \text{ 或 } \pi$$

因向X轴负方向运动

由旋转矢量图可知 $\varphi = 0$



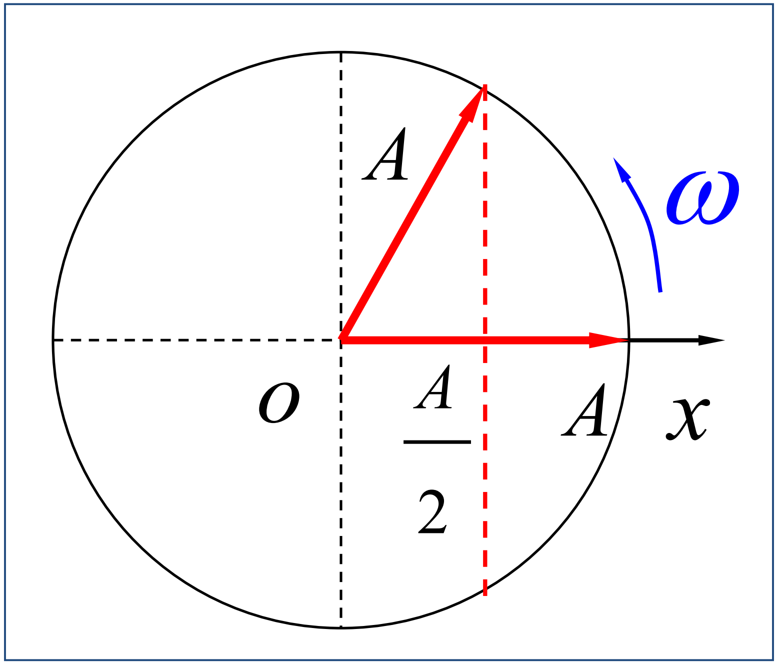
$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = 0.05\cos 6.0t\ \mathrm{m}$$

（2）求物体从初位置运动到第一次经过 $\dfrac{A}{2}$ 处时的速度；

解 $$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A} = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \text{或} \frac{5\pi}{3}$$



由旋转矢量图可知 $\omega t = \dfrac{\pi}{3}$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

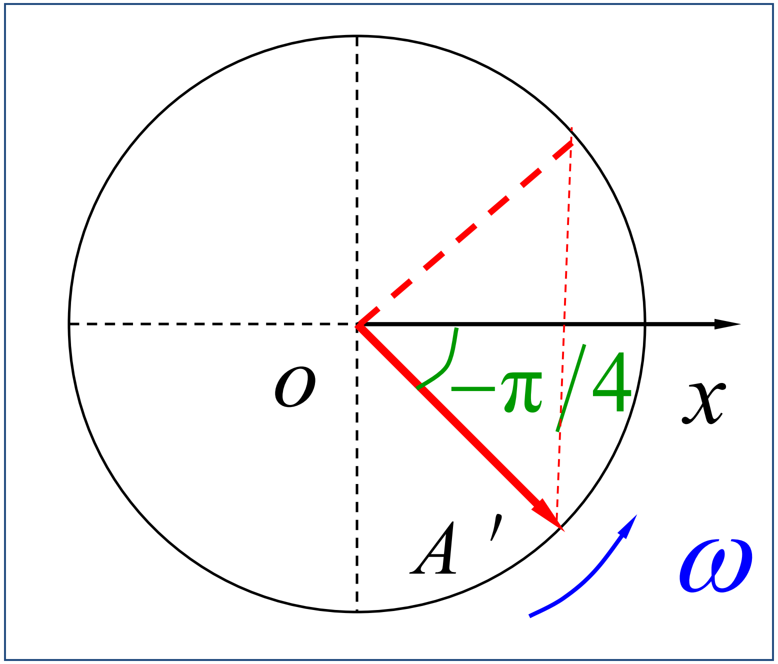
$$= -0.26\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$ （负号表示速度沿 Ox 轴负方向）

（3）如果物体在 $x = 0.05\ \mathrm{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0 = 0.30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，求其运动方程.

解 $$A' = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0.0707\ \mathrm{m}$$

$$\tan\varphi' = \frac{-v_0}{\omega x_0} = -1$$

$$\varphi' = -\frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}$$



因为 $v_0 > 0$，由旋转矢量图可知 $\varphi' = -\pi/4$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = 0.0707\cos(6.0t - \frac{\pi}{4})$$

作业

- **P135：6；9；10；11；12**

版权声明